NISU SVE OCJENE JEDNAKO TEŠKE

UVOD

Vrlo važna činjenica s kojom smo svakodnevno u dodiru, ponekad i nesvjesno, jest pridavanje težine i vrijednosti različitim stvarima, ljudima, osjećajima i ostalim životnim događajima. Sasvim je prirodno različite stvari na različite načine promatrati, procjenjivati i vrednovati. Različitost podrazumijeva razliku u barem jednoj osobini, a često je potrebno tu razliku i istaknuti.

ARITMETIČKA SREDINA

Jedan od najpoznatijih i najčešće korišćenih statističkih alata pri obradi podataka jest aritmetička sredina. Ova mjera centralne tendencije često se naziva i prosjek.

DEFINICIJA: Za brojevni niz podataka $x_1,\ldots,x_n$ njihovom aritmetičkom sredinom zovemo broj

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

Primjera gdje nam sve koristi aritmetička sredina je zaista puno, no najčešće je računanje prosjeka (ocjena, temperature, visine, cijene, plaće, itd.). Valja istaknuti, kada je riječ o ocjenama, kako je ovaj način računanja konačne ocjene jedan od najrasprostranjenijih kako u našem obrazovnom sustavu, tako i u ostalima.

PRIMJER 1: Izračunaj prosječnu ocjenu slijedećih ocjena: 4, 5, 3, 2, 1, 4, 4 i 5.

RJEŠENJE: Prema formuli iz definicije aritmetičke sredine slijedi:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{4+5+3+2+1+4+4+5}{8}=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}=3{,}5$$

Zaokruživanjem decimalnog broja dobije se konačna ocjena 4.

TEŽINSKA[1] ARITMETIČKA SREDINA

Kako je naglašeno u uvodu, ponekad se pojavljuje potreba za isticanjem, naglašavanjem ili suprotno prigušivanjem određenih osobina, pojavnosti ili pak doprinosa određene jedinice u cjelini. Možemo reći kako nekim stvarima (članovima nekog skupa) pridajemo manju ili veću težinu, odnosno važnost u ovisnosti kako one participiraju u promatranom skupu. Svakako da želimo taj poseban doprinos na ukupnost i procijeniti, kako kvantitativno tako i kvalitativno.

Kvantitativan će doprinos činiti ukupan broj promatranih događaja, dok će kvalitativan doprinos izražavati ustvari težinu svakog tog pobrojanog događaja.

DEFINICIJA: Težinska aritmetička sredina definira se slijedećim izrazom

$$\bar{x}_w=\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

gdje su vrijednostima $x_1,\ldots,x_n$ pridruženi nenegativni brojevi w_i zvani težine (ponderi) [1].

PRIMJER 2: Izračunaj prosječnu ocjenu slijedećih ocjena iz prethodnog primjera: 4, 5, 3, 2, 1, 4, 4 i 5. Ocjene su dobivene po slijedećim elementima ocjenjivanja s pripadajućim težinama: 1) usvojenost nastavnih sadržaja ($w_1=2$) 4, 5 i 3; 2) primjena teorijskih znanja ($w_2=3$) 2, 1 i 4; i 3) aktivnost ($w_3=1$) 4 i 5.

RJEŠENJE: Primjenom definicije težinske aritmetičke sredine jest:

$$\bar{x}_w=\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}=\frac{w_1x_1+w_1x_2+w_1x_3+w_2x_4+w_2x_5+w_2x_6+w_3x_7+w_3x_8}{w_1+w_1+w_1+w_2+w_2+w_2+w_3+w_3}=$$

$$=\frac{2\cdot4+2\cdot5+2\cdot3+3\cdot2+3\cdot1+3\cdot4+1\cdot4+1\cdot5}{2+2+2+3+3+3+1+1}=\frac{8+10+6+6+3+12+4+5}{3\cdot2+3\cdot3+2\cdot1}=\frac{54}{17}\approx3{,}176$$

[1] od engleske riječi weighted – težinski, a često se koristi i termin vagana ili ponderirana aritmetička sredina gdje se pond još naziva i funta. Prema Weights and Measures Act pound je mjerna jedinica za masu i iznosi 1 lb=0,45359 kg ali i za silu (1 lbf definirana kao težina 1 lb).

U ovom slučaju, prosječna je ocjena manja nego u slučaju klasične ili jednostavne aritmetičke sredine jer su ocjene složene u podskupove različitih važnosti. Naravno da težinska prosječna ocjena može biti i veća od obične, što bi se dogodilo kada bismo veće težine pridružili većim ocjenama.

Pretpostavimo li kako nema različitih težina, odnosno sve su težine iste $w_i = w = konst$, vraćamo se na običnu aritmetičku sredinu:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \ldots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \frac{w \cdot x_1 + w \cdot x_2 + \ldots + w \cdot x_n}{w + w + \ldots + w} = \frac{\cancel{w} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n \cdot \cancel{w}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

Ponderi se mogu koristiti i u slučaju međusobno jednakih težina podataka, ako postoji ponavljanje pojedinih podataka. U tom slučaju ponder je frekvencija pojavljivanja podatka. Formula se može izraziti i preko relativnih frekvencija $p_i = w_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} w_i$:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{w_1 \cdot x_1}{\sum_{i=1}^{n} w_i} + \frac{w_2 \cdot x_2}{\sum_{i=1}^{n} w_i} + \ldots + \frac{w_n \cdot x_n}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{w_1}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \cdot x_1 + \frac{w_2}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \cdot x_2 + \ldots + \frac{w_n}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \cdot x_n = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$$

U primjeru 1. aritmetičku sredinu možemo prikazati na slijedeći način:

ocjena	1	2	3	4	5
frekvencija ocjene	1	1	1	3	2
relativna frekvencija p_i	$\frac{1}{1+1+1+3+2} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + p_4 \cdot x_4 + p_5 \cdot x_5 = \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{3}{8} \cdot 4 + \frac{2}{8} \cdot 5 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{10}{8} =$$

$$= \frac{1+2+3+12+10}{8} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

PRIMJER 3: U razredu s 24 učenika je 10 učenika čija je prosječna visina 178 cm i 14 učenica s prosječnom visinom 173 cm. Odrediti prosječnu visinu razreda.

RJEŠENJE: Očito su visine učenika podatci čija se aritmetička sredina traži tako da je $x_1 = 178\,\text{cm}$ i $x_2 = 173\,\text{cm}$. No, njihovi doprinosi prosjeku nisu isti. Ako se doprinosima pridruže njihove težine tada je prema definiciji težinske aritmetičke sredine:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{10 \cdot 178 + 14 \cdot 173}{10 + 14} = \frac{1780 + 2422}{24} = \frac{4202}{24} = 175{,}08\dot{3}\,\text{cm}$$

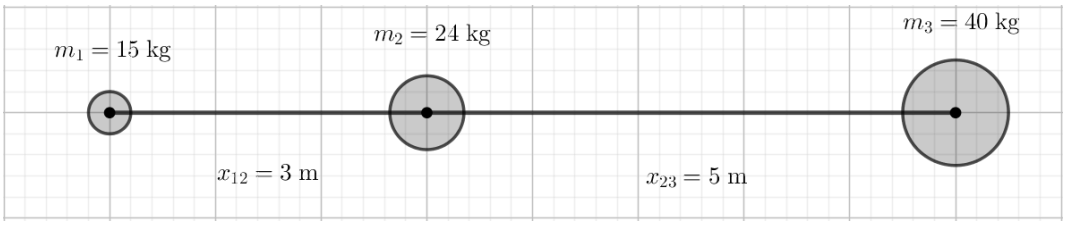
PRIMJER 4: U automobilskom se hladnjaku nalazi 3 l rashladne tekućine (antifriza) koja pruža zaštitu do -18°C. Koliko treba dodati tekućine (-30°C) da bi automobil bio zaštićen na temperaturama do -24°C?

RJEŠENJE: Nakon mješanja tekućina dobit će se tekućina čija su svojstva prosječne vrijednosti tekućina prije miješanja, što se može zapisati na način:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{3 \cdot (-18) + w_2 \cdot (-30)}{3 + w_2} = -24\,°\text{C}$$

jednostavnim sređivanjem ovog izraza dobije se $w_2 = 3\,\text{l}$.

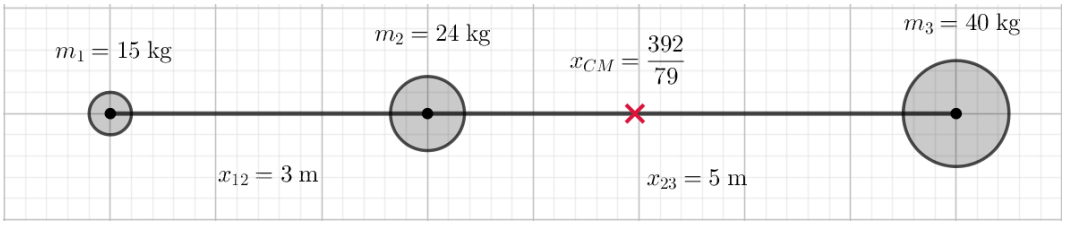
PRIMJER 5: Odrediti težište (centar masa) sustava tri tijela sa slike.



RJEŠENJE: Ovaj fizikalni primjer zorno prikazuje smisao težinske aritmetičke sredine gdje se traži aritmetička sredina jedne veličine (koordinate položaja) uzimajući u obzir različite težine[2] različitih položaja. Neka je središte koordinatnog sustava (relativno mjesto promatrača) u položaju tijela mase m_1. Tada je primjenom definicije težinske aritmetičke sredine:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + m_3\, x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2\, x_{12} + m_3 (x_{12} + x_{23})}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{15 \cdot 0 + 24 \cdot 3 + 40(3+5)}{15 + 24 + 40} = \frac{0 + 72 + 320}{79} = \frac{392}{79} \approx 4{,}96\,\text{m}$$

[2] riječ težina ovdje ima značenje važnosti općenito, a nikako težine u fizikalnom smislu.



EXCEL I TEŽINSKA ARITMETIČKA SREDINA

Jednostavniji zadatci kao što su primjeri 3, 4 i 5 ne zahtjevaju puno vremena i truda, no za slučajeve većeg broja podataka i razreda, odnosno težina, poželjno je koristiti nekakve alate, kao npr. jednostavni online kalkulator [4] ili Excel koji nudi već gotovu opciju, ili pak mogućnost kreiranja vlastite formule.
U programu Excel jednostavnu aritmetičku sredinu računamo pomoću naredbe **Average** koja se nalazi na alatnoj traci **Editing** pod znakom sume Σ. Naredba **Sumproduct** koja se nalazi među **Formulama** računa težinsku aritmetičku sredinu odabranih podataka sukladno dodijeljenim težinama.

PRIMJENE TEŽINSKE ARITMETIČKE SREDINE

Prigodom donošenja novog Pravilnika[3] o uvjetima i načinu ostvarivanja prava redovitih studenata na subvencionirano stanovanje, u svibnju 2017. predložen je, i nije usvojen, obračun prosječne ocjene primjenom formule težinske aritmetičke sredine, gdje su ponderi predstavljali ostvarene ECTS bodove koji trebaju korelirati sa složenošću predmeta.

Odgojno-obrazovni sustavi razvijenih država koji bi mogli poslužiti kao uzor, već duže vrijeme koriste ovaj način obračuna prosjeka ocjena poznatog i kao GPA[4]. Detaljniji prikaz s primjerom može se pronaći na raznim online GPA kalkulatorima [3] i [4].

Problem o prosjeku ocjena kao jednostavnoj aritmetičkoj sredini prezentiran u časopisu MiŠ [2] korektnije je rješiv težinskom aritmetičkom sredinom gdje bi pondere predstavljao npr. tjedni broj sati predmeta.

Neke od primjena [5] težinske aritmetičke sredine prikazane su i u gore navedenim primjerima iz života i ostalih znanstvenih disciplina.

LITERATURA:

1. Bronštejn, Semendjajev, Musiol, Muhling (2004.): *Matematički priručnik*, Golden Marketing – Tehnička knjiga, Zagreb
2. Ž. Kraljić (2011.): Prosječna ocjena – da ili ne aritmetičkoj sredini?, *Matematika i škola 52*, str. 81-83,
3. http://www.back2college.com/gpa.htm
4. https://www.calculat.org/hr/prosjek/ponderirana-aritmeticka-sredina.html
5. https://www.onlinemathlearning.com/weighted-average-problems.html

[3] https://srednja.hr/studenti/vijesti/promjena-pravilnika-za-ostvarivanje-smjestaja-prosjek-ocjena-se-obracunava-na-novi-nacin/
[4] Grade Point Average