# Geometrija vukovarskih lukova

*Predrag Novaković i*
*Aleksandar Novaković, Vukovar*

U ovom članku prikazat ćemo vezu između matematike, primijenjenih znanosti, posebice građevinskih, ali i umjetnosti, u službi ljudskih i civilizacijskih potreba tijekom povijesti jednoga malog grada. Ovaj članak može poslužiti i kao ideja ili kao izvor podataka za projektni zadatak u nastavi matematike u srednjim školama.

## Uvod

Osim namjene i funkcionalnosti građevine imaju još jedno bitno svojstvo – one su spomenik vremena unutar kojega je dio ljudskoga roda živio, stvarao, razmišljao, rješavao probleme... S druge strane, razvoj i napredak u građevinarstvu dokaz je razvoja civilizacije, ali i njenog osnovnog gradivnog elementa – čovjeka.

Lukovi i svodovi svoju važnost u graditeljstvu dokazuju mijenijskom poviješću, još iz doba Mezopotamije otprilike 2000 godina prije Krista, a svoju sustavnu i masovnu primjenu doživljavaju u doba Rimskog Carstva kada su građene mnoge palače, amfiteatri, koloseji, mostovi, vijadukti, akvadukti itd. ponajviše zahvaljujući rimskom graditeljskom virtuozu Vitruviusu[1]. Zajednička je značajka rimskih lukova njihova geometrija – polukružni lukovi koji su se zadržali do današnjih dana, ali su velikim dijelom obilježili i doba baroka.

## Osnovni podatci i geometrija objekta

Barokno vukovarsko središte, kakvim ga danas poznajemo, počelo je nicati sredinom 18. stoljeća, nakon odlaska Turaka s ovih prostora, a veći dio građanskih stambenih kuća bio je završen do 1790. godine. Na baroknome trgu, u samome središtu Vukovara, nekoliko je spomen-kuća baroknog klasicizma, od kojih su na slikama odabrane Magaze Mihajlović I i II, sagrađene 1760. godine. I poslije više od 250 godina ove arkade ne prestaju

Predrag Novaković, prof., Tehnička škola Nikole Tesle, Vukovar, `predrag.novakovic1507@gmail.com`
Aleksandar Novaković, Vukovar, `novakovic185@gmail.com`

[1] Marcus Vitruvius Pollio (80./70. pr. Kr. – 15. poslije Kr.), rimski graditelj, arhitekt i vojni inženjer; poznat po uvođenju triju graditeljskih svojstva: izdržljivosti, primjenljivosti i ljepote.

pobuđivati interes i znatiželju osoba raznih profesija, pa tako i matematičara.

Već prvim pogledom na pročelja promatranih baroknih zgrada s naglaskom na lukove primjetna su određena ograničenja koja su utjecala na njihov konačni oblik. Prije svega, visina prizemlja i raspon stupova. Kako je visina prizemlja stalna, razmak između stupova izravno je utjecao na oblik i zakrivljenost lukova.

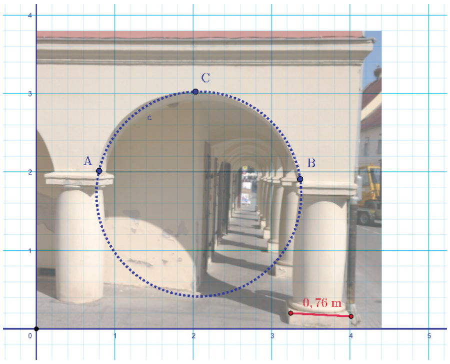
Slika 1.

Luk u građevinarstvu i arhitekturi zadovoljava sva tri Vitruvijeva načela te je kao neophodan graditeljski element s vremenom doživljavao različite varijacije i izvedbe. Uz najkorišteniji polukružni i segmentalni luk vrlo su česti ovalni, eliptični i parabolični lukovi. Neke od ovih lukova lako je prepoznati i u samome vukovarskom središtu.[2]

## Polukružni lukovi

Najjednostavniji je luk polukružni čija izvedba prati poznati geometrijski element – kružnicu. Na zgradi sa slike 2 primjetna su dva polukružna luka; vanjski veći, istaknut plavom točkastom kružnicom i trima točkama te unutarnji manji. U donjem desnom kutu nalazi se crveno istaknuta stvarna duljina kvadratne stope[3] jednog nosivog stupa koja iznosi $0.76$ m. Prema ovoj su mjeri približno određeni koordinatni sustav i mreža tako da $1$ m u stvarnosti približno odgovara jediničnoj dužini u koordinatnom sustavu. Valja naglasiti da je za nastavne potrebe dovoljno računati s dvije decimale jer na pogrešku u velikoj mjeri utječu točka, kut i udaljenost slikanja, odnosno perspektiva slike, što je posebno primjetno kasnije na slikama 4 i 6.

*Zadatak. Odredite jednadžbu kružnice koja se najbolje podudara s polukružnim lukom na slici.*




Slika 2.

Cilj je odrediti jednadžbu kružnice u analitičkom obliku:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Prvi je korak odabrati ili pripremiti što kvalitetniju sliku, pri čemu treba paziti na kut snimanja ako se objekt fotografira. Ako ne postoji stvarna mjera jednoga dijela objekta na slici, ni najbolja slika neće biti od koristi, zbog toga je izmjerena duljina kvadratne stope (iznosi $0.76$ m). Sljedeći korak je smjestiti sliku u povoljan koordinatni sustav kako bi se dobile ključne točke. U ovom je radu upotrijebljena aplikacija GeoGebra kao jedan od najpovoljnijih i najjednostavnijih matematičkih alata, dovoljnih u pokrivanju cjelokupne nastave matematike u srednjim školama. Naredba *Insert image from* u izborniku *Edit* omogućava umetanje željene slike u željeni prostor uz prilagodbe same slike (svjetlina, kontrast, boja...), što je najbolje namještati samostalno.

Do jednadžbe kružnice sa slike može se doći na dva načina. Prvi je analitički, uvrštavanjem koordinata triju proizvoljnih točaka u opću jednadžbu kružnice pri čemu se dobiva sustav triju jednadžbi s

[2] Zahvaljujemo stručnim i ljubaznim zaposlenicima Gradskog muzeja Vukovar na materijalima i uputama

[3] Golim okom vidljiva "neparalelnost" mjerne dužine i $x$-koordinatne osi rezultat je blagog padajućeg nagiba ulice (na slici s lijeva na desno), ali i perspektive, male udaljenosti slikanja i položaja kamere u trenutku slikanja.

trima nepoznanicama čija su rješenja traženi parametri opće jednadžbe. Drugi je geometrijski, konstrukcijom kružnice zadane s trima točkama, gdje aplikacija GeoGebra opet može pomoći naredbom *Circle through 3 points* koja se nalazi u alatnoj traci pod tipkom.

Prema slici 2 učenik prepoznaje istaknuto središte koordinatnog sustava, jediničnu duljinu, 3 istaknute točke čije koordinate slijedom iščitava približno (dovoljno je i na jednu decimalu[4]) iz koordinatne mreže: $A(0.79, 2.01)$, $B(3.35, 1.91)$, $C(2.02, 3.02)$. Ovdje valja istaknuti pitanje svrsishodnosti i opravdanosti izračuna s dvije decimale. Kada je korištena osnovna mjerna jedinica $1$ m, pogreška na drugoj decimali je zapravo pogreška od $1$ cm u stvarnosti. Tražena jednadžba kružnice je:

$$(x - 2.06)^2 + (y - 1.72)^2 = 1.7$$

iz koje možemo izračunati njezin polumjer $r = \sqrt{1.7} \approx 1.3$ m, ali i približan razmak između dva stupa koji je jednak promjeru kružnice $d = 2r \approx 2.6$ m. Pažljivim gledanjem slike, prema danoj mjeri, doista se možemo uvjeriti u sukladnost mjera sa slike i dobivenog izračuna.

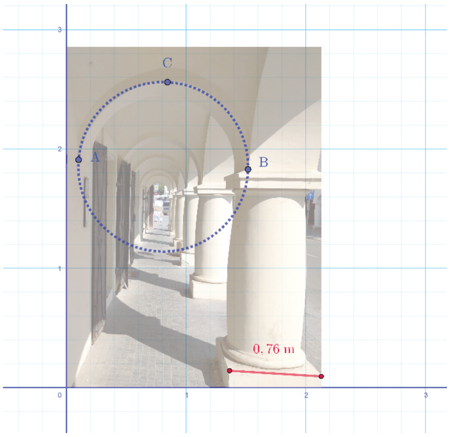
Sličan računski postupak provediv je i nad manjim, unutarnjim kružnim lukom nad prolazom sa slike 3. Koordinate izabranih istaknutih točaka na slici 3 su: $A(0.1, 1.91)$, $B(1.52, 1.83)$ i $C(0.84, 2.56)$ kojima pripada kružnica opisana jednadžbom:

$$(x - 0.81)^2 + (y - 1.85)^2 = 0.5.$$

Polumjer kružnice jest $r = \sqrt{0.5} \approx 0.71$ m, odnosno promjer koji prem slici predstavlja širinu prolaza $d = 2r \approx 1.41$ m.

## Ostali zakrivljeni lukovi

S pročelja promatranu zgradu krase lukovi različitih zakrivljenih oblika kao posljedica prostornih zahtjeva, širine između stupova i visine prizemlja. Očita je bila osnovna namjera graditelja izgraditi iste polukružne lukove, što je i donekle uspjelo u jednom




Slika 3.

dijelu pročelja do šireg nadsvođenog prolaza gdje je trebalo premostiti veći raspon. Pogled na ovaj luk otkriva kako su graditelju na raspolaganju bila, vrlo vjerojatno, dva izbora izvedbe luka: eliptični i ovalni luk trostrukog središta[5].

Eliptični luk predstavlja gornju polovicu elipse široke dvije poluosi, a visoke jednu poluos. Slično prethodnim primjerima određivanja jednadžbe kružnice, učenicima se kao zanimljiv zadatak može svidjeti i određivanje jednadžbe elipse koja opisuje luk sa slike 4, ali i složeniji zadatak određivanja jednadžbi triju kružnica i međusobnog položaja njihovih središta svojstvenih ovalnom luku sa slike 6. Na obje slike primjetna su odstupanja idealne krivulje od stvarnog oblika nastala zbog, manjim dijelom nesavršenosti graditeljske izvedbe, a većim dijelom nemogućnosti izbora idealnog položaja za korektnu fotografiju. Sigurno je kako ove sitne anomalije neće umanjiti vrijednosti ovog pristupa.

*Zadatak. Odrediti jednadžbu elipse koja se najbolje podudara sa zadanim lukom.*

Pod jednadžbom elipse podrazumijeva se kanonska ili osna jednadžba elipse, dana izrazom:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gdje su $a$ i $b$ velika i mala poluos elipse.

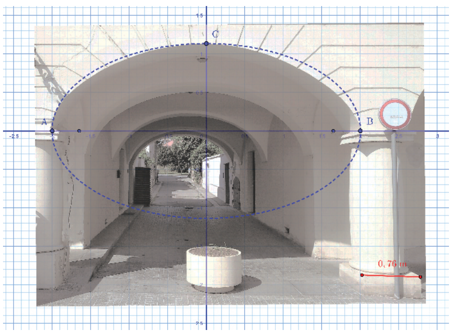
[4] Dvije decimale mogu se očitati tek pažljivim približnim izborom točaka uz naredbu *Zoom*

[5] Često se zove *basket-handle arch* jer podsjeća na luk ručke na košari.

Proizvoljnim i pogodnim izborom točke za središte koordinatnog sustava, ne mijenjaju se parametri elipse, ali se izračun čini jednostavnijim, tako da je središte koordinatnog sustava u sjecištu velike i male poluosi elipse. Zadaća određivanja jednadžbe elipse sa slike 4 je vrlo jednostavna i svodi se na očitanje duljina velike i male poluosi iz koordinata rubnih točaka. Koordinate gornjeg tjemena elipse u istaknutom koordinatnom sustavu približno su $C(0, 1.14)$, a koordinate najdaljih tjemena od središta su $A(-2, 0)$ i $B(2, 0)$. Kako je velika poluos $a = 2$, a mala poluos $b = 1.14$, jednadžba elipse jest:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1.14^2} = 1.$$

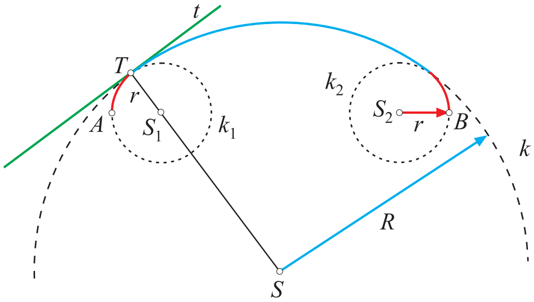
Ništa težu zadaću učenicima ne predstavlja izračun žarišta elipse, njezinog linearnog i numeričkog ekscentriciteta. Složenija inačica ovog zadatka bila bi određivanje kanonske jednadžbe elipse zadane trima točkama koje nisu tjemena elipse. Dobivena rješenja, odnosno jednadžbe na ova dva načina su usporediva i korektivna, što je pogodno pri odabiru grupnog rada s heterogenim grupama.




Slika 4.

Ovalni luk trostrukog središta karakteriziran je trima kružnicama $k$, $k_1$ i $k_2$ od kojih su dvije bočne $k_1$ i $k_2$ sukladne. Točka spoja kružnica $T$ zajednička im je, kao i tangenta $t$ na obje kružnice u toj točki. Luk sa slike počinje u točki $A$, a završava u $B$, uz uvjet da su točke $A$, $S_1$, $S_2$ i $B$ kolinearne.

[6] formule preuzete (A. Alcayde *et al.*, 2019).




Slika 5.

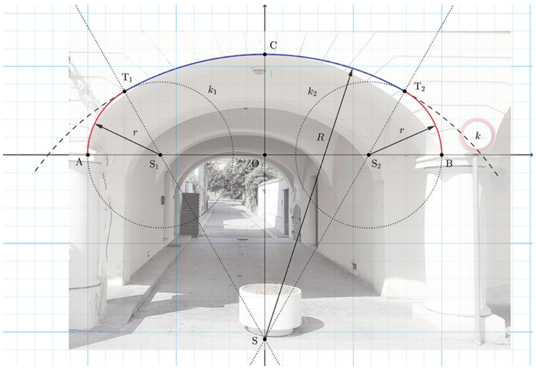
Veličine koje određuju oblik ovalnog luka jesu širina $l = \overline{AB}$, odnosno polovica njezine duljine, poludistanca $d = \frac{l}{2}$ i visina $h = \overline{OC}$ luka, iz kojih su dobiveni polumjer $R$ središnje i polumjer $r$ bočnih kružnica[6].

$$R = \frac{d^2 + h^2 + (d-h)\cdot\sqrt{d^2+h^2}}{2h}$$

$$r = \frac{d^2 + h^2 - (d-h)\cdot\sqrt{d^2+h^2}}{2d}.$$

Za poseban luk sa slike 4 tražene se vrijednosti $d = \frac{l}{2} = 2$ m i $h = 1.14$ m iščitaju iz "metrizirane" slike, odnosno slike s koordinatnim sustavom jedinične dužine $E = 1$ m, tako da je $R = 3.21$ m i $r = 0.83$ m.

*Zadatak. Odredite jednadžbe triju kružnica koje određuju ovalni luk trostrukog središta.*




Slika 6.

Kao i u prethodnom zadatku s elipsom, izbor koordinatnog sustava ostaje isti. Za kružnice $k_1$ i

$k_2$ istih polumjera $r = 0.83$ m središta su osno simetrična s obzirom na ordinatu i lako se dobiju jer su poznate koordinate točaka $A(-2, 0)$ i $B(2, 0)$, tako da su nakon uvećanja i umanjenja apscisa točaka za polumjer $r$ njihova središta $S_1(-1.18, 0)$ i $S_2(1.18, 0)$. Uz poznati polumjer jednadžbe kružnica $k_1$ i $k_2$ su:

$$k_1 : (x + 1.18)^2 + y^2 = 0.83^2$$
$$k_2 : (x - 1.18)^2 + y^2 = 0.83^2.$$

Sličan je pristup i izračunu kružnice $k$, gdje je zgodno iskoristiti vršnu točku $C(0, 1.14)$ iz zadatka s elipsom kako bi se dobile koordinate središta oduzimanjem polumjera $R = 3.21$ m od $y$-koordinate:

$$S(0, 1.14 - 3.21) = S(0, -2.08).$$

Jednadžba središnje kružnice $k$ je:

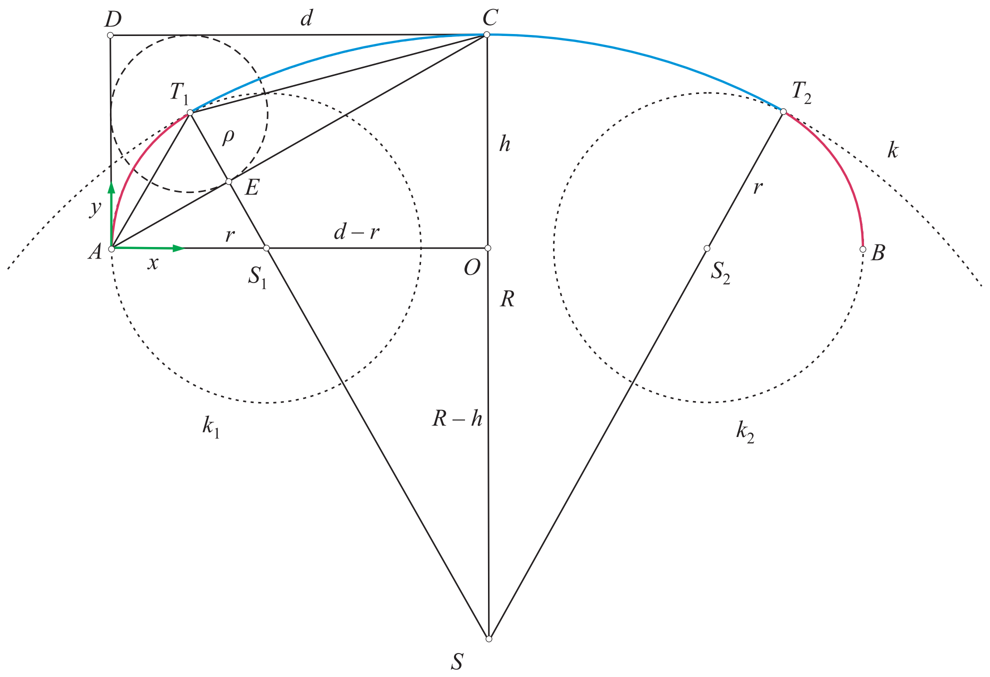
$$k : x^2 + (y + 2.08)^2 = 3.21^2.$$

Ovdje valja napomenuti i mogućnost izbora metode određivanja jednadžbe kružnice dane s tri točke gdje je potrebno iz slike odabrati tri točke. Ovaj zadatak, uz prethodni zadatak s elipsom, omogućava rad u više heterogenih skupina, određenih težinom i zahtjevom zadataka, ali i njihovim vrednovanjem, što uvelike ovisi o kreativnosti i agilnosti samih nastavnika matematike.

## Izvod polumjera ovalnog luka

Praktičan zadatak na terenu jest ovalnim lukom premostiti udaljenost $l$ i visinu $h$, a praktičan problem odrediti polumjere $R$ i $r$ koji su dani u gotovom obliku. U ovom će odjeljku biti apostrofirana primjena analitičke geometrije u izvođenju gore prikazanih i upotrijebljenih formula, uz poštovanje zakonitosti i zahtjeva graditeljske struke.

Na slici 7 prikazan je ovalni luk između točaka $A$ i $B$ duljine $l = 2d$ i visine $h$. Točke $S$, $S_1$ i $S_2$ su središta redom središnje i bočnih kružnica. Valja primijetiti i pravokutan trokut $\triangle ACD$ i njemu upisanu kružnicu $k(T_1, \overline{T_1E})$ čiji je polumjer $\overline{T_1E}$ okomit na $\overline{AC}$. Odmah na početku, važno je istaknuti kako je zahtjev graditeljske struke (zbog prijenosa naprezanja u lukovima) najmanji omjer polumjera $\frac{R}{r}$.




Slika 7.

Neka je $\rho = \overline{T_1E}$ polumjer kružnice $k(T_1, \overline{T_1E})$ upisane u $\triangle ACD$. Uzmu li se $\overline{T_1A}$ i $\overline{T_1C}$ za osi, jednadžba pravca kolinearnog s $\overline{AC}$ u segmentnom, tj. implicitnom obliku glasi:

$$AC \cong \frac{x}{d} + \frac{x}{h} = 1 \iff hx + dy - dh = 0.$$

Udaljenost točke $T_1(d-\rho, h-\rho)$ od pravca $AC$ je $\rho$:

$$\frac{h(d-\rho) + d(h-\rho) - dh}{\sqrt{d^2+h^2}} = \rho$$

odakle se dobije

$$\rho = \frac{d + h - \sqrt{d^2+h^2}}{2}$$

što za središte upisane kružnice $T_1(d-\rho, h-\rho)$ daje:

$$T_1\left(\frac{d-h+\sqrt{d^2+h^2}}{2}, \frac{h-d+\sqrt{d^2+h^2}}{2}\right).$$

Iz okomitosti $T_1E$ na $AC$, jednadžba pravca točkom $T_1(d-\rho, h-\rho)$ i nagibom $\frac{d}{h}$ daje:

$$y - \frac{h-d+\sqrt{d^2+h^2}}{2} = \frac{d}{h} = \frac{d}{h}\left(x - \frac{d-h+\sqrt{d^2+h^2}}{2}\right).$$

Promatramo li promjene po $y$, odnosno kada je $x = 0$ za polumjer središnje kružnice dobije se:

$$R = \frac{d^2 + h^2 + (d-h)\cdot\sqrt{d^2+h^2}}{2h},$$

a u slučaju $y = 0$ bit će:

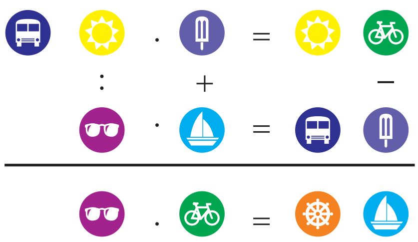
$$r = \frac{d^2 + h^2 - (d-h)\cdot\sqrt{d^2+h^2}}{2d}.$$

## Zaključak

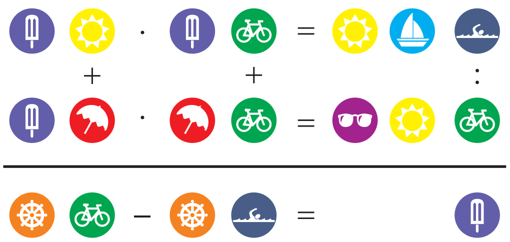
Prikazan je još jedan u nizu primjera i primjena matematike u oblikovanju čovjekova životnoga prostora, ali i vremena. Veći dio povijesti ljudskoga stvaralaštva najbolje oslikavaju graditeljska djela, jednako kao što to čine i znanstvena i umjetnička. Na kreativnim i maštovitim djelima najbolje je učiti, nadograđivati i proširivati nemala stečena znanja.

### Matematički rebusi za ljetnu razonodu!

1)



2)



Rješenja: 1) 49 · 2 = 98, 7 · 6 = 42, 7 · 8 = 56; 2) 27 · 28 = 756, 21 · 18 = 378, 48 - 46 = 2.